Défis 1ère Spé maths : Trigonométrie – Thiaude P.

Défi TRIGO 01 **Formules des angles associés**

On pose :

$$A = \cos\left(1\times\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)$$
$$B = \cos\left(1\times\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)$$
$$C = \cos\left(1\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(3\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(4\times\frac{\pi}{5}\right)$$

Vérifier que $A=0$ et $B=0$.

En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer C.

Corrigé

$$A = \cos\left(1\times\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$B = \cos\left(1\times\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$
$$C = \cos\left(1\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(3\times\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(4\times\frac{\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\frac{\pi+4\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}=\pi$$

donc :

$$\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$$

de même :

$$\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=\frac{2\pi+3\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}=\pi$$

donc :

$$\frac{3\pi}{5}=\pi-\frac{2\pi}{5}$$

D'où

$$C=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x on a : $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, donc :

$$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\text{ et }\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On obtient :

$$C=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=0$$

Finalement : $C=0$.

Défi TRIGO 02 **Formules des angles associés**

On pose :

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), B=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\text{ et } C=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

Vérifier que $A=0$ et $B=0$.

En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer C.

Corrigé

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$
$$B=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$
$$C=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{6\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{6\pi-\pi}{5}=\frac{5\pi}{5}=\pi$$

donc :

$$\frac{6\pi}{5}=\pi+\frac{\pi}{5}$$

On en déduit que :

$$C=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x : $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$ donc : $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On e en déduit que :

$$C=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$$

Finalement : $C=0$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Défi TRIGO 03 Formules des angles associés

En rappelant les formules des angles associés utilisée, calculer :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Corrigé

On a d'une part :

$$\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

et d'autre part :

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Or,

- pour tout réel x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $(*)$
- pour tout réel x on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ $(**)$.

On a :

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{(en utilisant } (*) \text{ et } (**)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement : $A = 0$.

Défi TRIGO 04 Formules des angles associés

On pose :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right)$$

En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer A.

Corrigé

On a :

$$\frac{\pi}{15} + \frac{13\pi}{30} = \frac{2\pi}{30} + \frac{13\pi}{30} = \frac{15\pi}{30} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{13\pi}{30} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}$$

Or,

- pour tout réel x, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$ $(*)$
- pour tout réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$ $(**)$

On a :

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \quad \text{(en utilisant } (*) \text{ et } (**)) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x, on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) = 1$

Finalement : $A = 1$.

Défi TRIGO 05 Équation trigonométrique

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $2\sin^2(x) + 2 = 5\sin(x)$.

Corrigé

L'équation $2\sin^2(x) + 2 = 5\sin(x)$ s'écrit aussi : $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$.
En posant $X = \sin(x)$, elle devient : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.
$2X^2 - 5X + 2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$avec $a = 2, b = -5$ et $c = 2$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$.
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

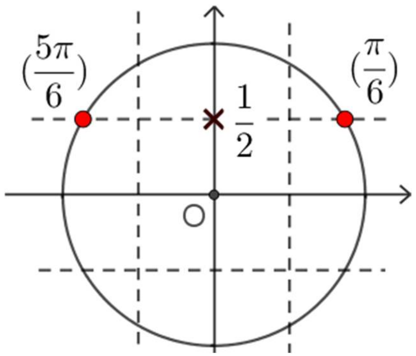
$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$$X = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$



ou

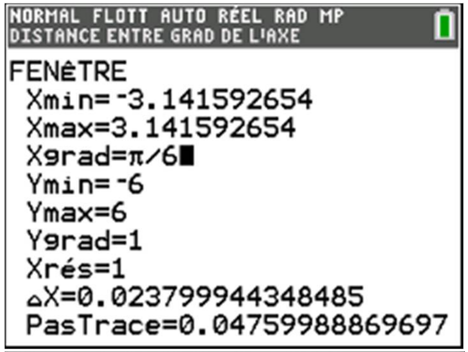
$$X = 2$$

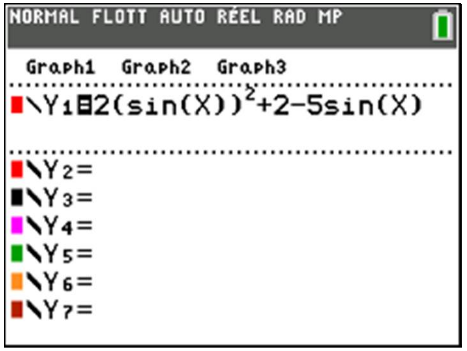
$$\sin(x) = 2$$

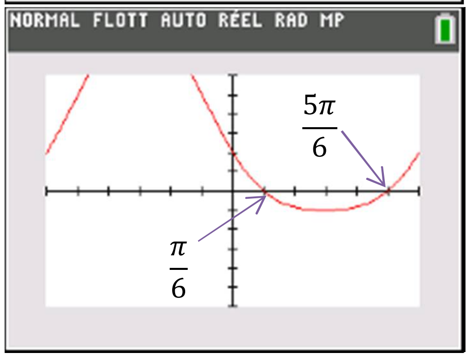
$$2 \notin [-1;1]$$

donc équation impossible

Conclusion : $S_{]-\pi;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.







Défi TRIGO 06 $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1.$

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $(*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x)$

$= \sin^2 x - \sin x \times \cos x + \cos x \times \sin x + \cos^2 x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \times \cos x + \sin x \times \cos x$

$= 1 + 0$ (en utilisant $(*)$)

$= 1$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1.$

Défi TRIGO 07 $\boldsymbol{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Démontrer que, pour tout réel x, on a : $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $(*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$= \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

$= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= 2 \times 1$ (en utilisant $(*)$)

$= 2$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$

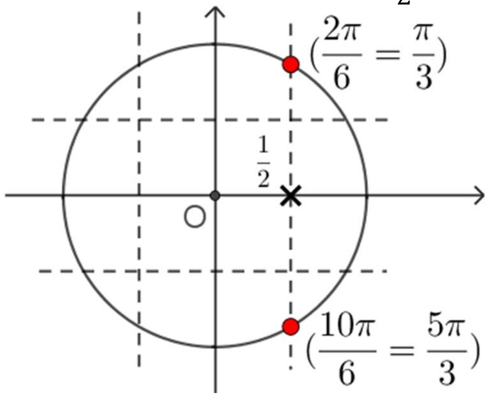
utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Défi TRIGO 08 équation trigonométrique

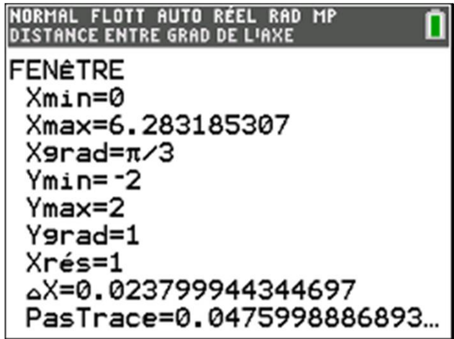
Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $2\cos(x) - 1 = 0$.

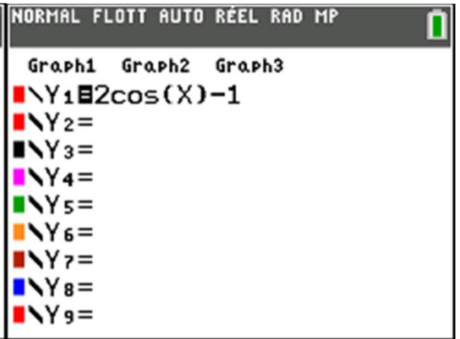
Corrigé

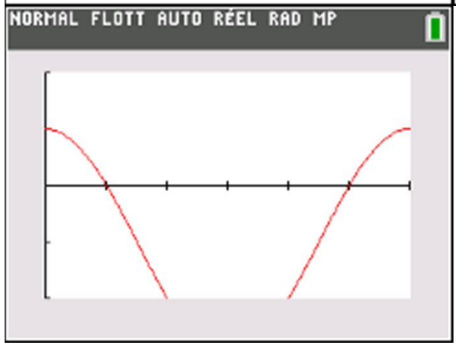
$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$



$S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$







Défi TRIGO 09 équation trigonométrique

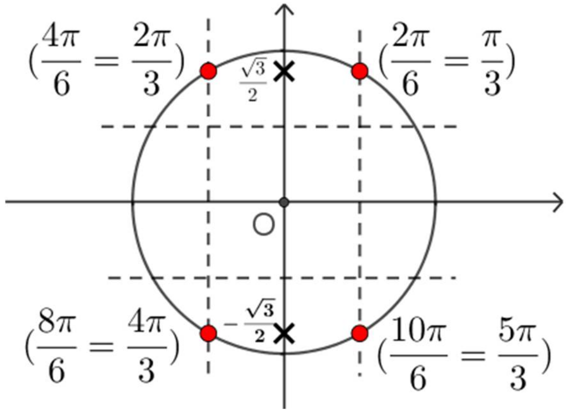
Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $4 \times \sin^2 x - 3 = 0$.

Corrigé

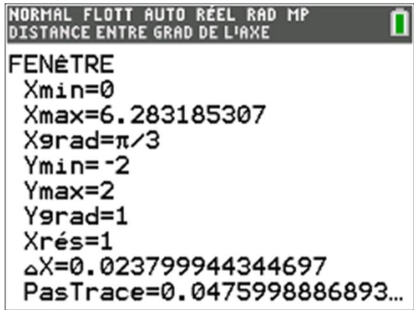
$4 \times \sin^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2\sin(x))^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

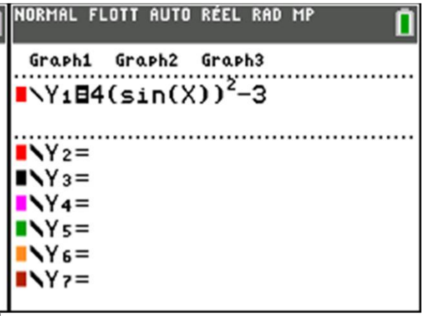
$\Leftrightarrow \left(2\sin(x) + \sqrt{3}\right)\left(2\sin(x) - \sqrt{3}\right) = 0$

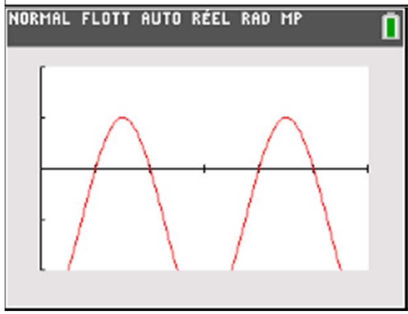
$\Leftrightarrow 2\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \;ou\; 2\sin(x) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;ou\; \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{3}\right\}$







utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Défi TRIGO 10

On admet la formule :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

1. Déduire de cette formule que, pour tout réel x on a :
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
2. En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
3. On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont positif.
   Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Démontrer que la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ obtenue à la question **3.**
   et celle proposée par la calculatrice sont égales.

__Corrigé__

Admis : $\boldsymbol{\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$

1. Déduire de cette formule que, pour tout réel x on a :
$$\boldsymbol{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

En posant $a = b = x$ dans la formule $(*)$, on obtient :
$$\cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

D'où : $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

On a : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ce qui s'écrit : $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$

ou encore :
$$\frac{1+\cos(2x)}{2} = \cos^2 x$$
On a donc bien, pour tout réel x :
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

2. En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2\times 2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
On a donc finalement :
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

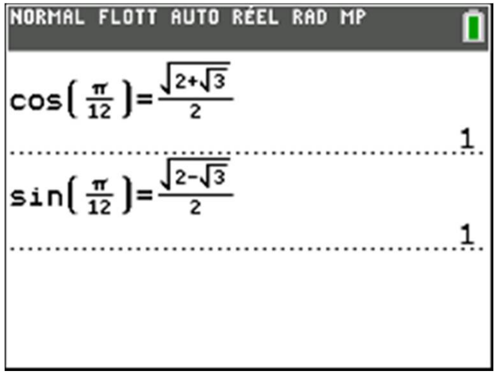
3. On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont positif.

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = +\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \; ou \; \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$
Or, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
Finalement :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4-(2+\sqrt{3})}{4}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{4-2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$
Donc :
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \; ou \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$
Or, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc :
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$
Finalement :
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

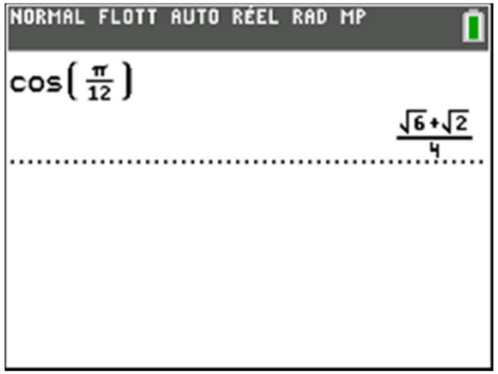
utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication __obligatoire__ de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

«Vérification» à la calculatrice



4. Démontrer que la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ obtenue à la question 3. et celle proposée par la calculatrice sont égales.

On obtient à la calculatrice :



Rappelons que pour a et b réels de même signe, on a :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$$

Les nombres $\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$ et $\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$ sont tous deux positifs, donc ils sont de même signe. D'autre part, on a :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\right)^2$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt3}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(\sqrt6+\sqrt2\right)^2}{4^2}$$
$$= \frac{2+\sqrt3}{4} - \frac{\left(\sqrt6\right)^2 + 2\sqrt6\sqrt2 + \left(\sqrt2\right)^2}{16}$$
$$= \frac{4(2+\sqrt3)}{16} - \frac{6+2\sqrt{2\times3}\times\sqrt2+2}{16}$$
$$= \frac{8+4\sqrt3-(6+2\sqrt2\sqrt3\sqrt2+2)}{16}$$
$$= \frac{8+4\sqrt3-\left(6+2\times\left(\sqrt2\right)^2\times\sqrt3+2\right)}{16}$$
$$= \frac{8+4\sqrt3-(6+4\sqrt3+2)}{16}$$
$$= \frac{8+4\sqrt3-8-4\sqrt3}{16}$$
$$= 0$$

Donc :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\right)^2 = 0$$

autrement dit :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\right)^2$$

Résumons

Les nombres $\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$ et $\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$ sont de même signe et ont des carrés égaux donc ils sont égaux.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Défi TRIGO 11 valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On admet que :

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (*)$
- pour tout polynôme P et tout réel a, on a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) \text{ est factorisable par } (x-a)$$

1. Déduire de la formule $(*)$ que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

2. En rappelant la formule des angles associés utilisée, montrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

En déduire que :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \quad (**)$$

Dans toute la suite on pose, pour tout réel x : $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$.

4. a. Vérifier que $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

   b. En déduire une factorisation de $P(x)$ sous forme de produit de deux polynômes du second degré.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

   Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, comparer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{1}{2}$

   puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Corrigé

On admet que :

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad (*)$
- **pour tout polynôme P et tout réel a, on a l'équivalence :**

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) \text{ est factorisable par } (x-a)$$

1. Déduire de la formule $(*)$ que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

En posant $a = b = x$ dans la formule $(*)$, on obtient :

$$\cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

D'où : $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

2. En rappelant la formule des angles associés utilisée, montrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

Remarquons que :

$$\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

Pour $x = \frac{\pi}{5}$ on obtient :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

On a :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
$$= \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right)$$
$$= 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1$$
$$= 2\left[\cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right)\right]^2 - 1$$
$$= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right]^2 - 1$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$$= 2\left(4\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)(1) + (1)^2\right) - 1$$
$$= 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2 - 1$$
$$= 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

On a donc bien :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

En déduire que :

$$\mathbf{8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0} \quad (**)$$

On a vu que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$, donc en remplaçant $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ par son expression donnée par $(**)$, on obtient :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$
$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0$$

Dans toute la suite on pose, pour tout réel x : $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$.

4. a. Vérifier que $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

On a :

$$P(-1) = 8(-1)^4 - 8(-1)^2 + (-1) + 1 = 8 - 8 - 1 + 1 = 0$$
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 8 \times \frac{1}{16} - 8 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$$
$$= \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + 1 = 2 - 2 = 0$$

On a donc bien : $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

b. En déduire qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$$\boldsymbol{P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)}$$

$P(-1) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $\big(x - (-1)\big)$ i.e. $(x+1)$,

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Or, on a :

$$(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x + x - \frac{1}{2} = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$P(x)$, qui est de degré 4, est factorisable par $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ qui est de degré 2 donc il existe Q du second degré tel que

$$P(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})Q(x)$$

Q étant du second degré on en déduit qu'il existe trois constantes réelles a, b et c telles que $Q(x) = ax^2 + bx + c$, donc telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$$

c. Déterminer a, b et c.

Le terme de plus haute degré de $P(x)$ est $8x^4$ et celui du membre de droite est ax^4 donc $a = 8$.

le terme constant de $P(x)$ est 1 et celui du membre de droite est $-\frac{1}{2}c$

donc $-\frac{1}{2}c = 1$ autrement dit $c = -2 \times 1 = -2$.

On a donc pour tout réel x :

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + bx - 2)$$

Enfin le terme en x^3 de $P(x)$ est $0x^3$ et celui du membre de droite est $(b+4)x^3$ donc $b + 4 = 0$ autrement dit $b = -4$.

On en déduit que : $a = 8$, $b = -4$ et $c = -2$ autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$$

5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ } ou \text{ } 8x^2 - 4x - 2 = 0$

Les solutions de $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ sont (-1) et $\frac{1}{2}$.

$8x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(4x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0$

$4x^2 - 2x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4, b = -2$ et $c = -1$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(4)(-1) = 4 + 16 = 20$.

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - 2\sqrt{5}}{2(4)} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{2 \times 4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + 2\sqrt{5}}{2(4)} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{2 \times 4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

L'équation $P(x) = 0$ admet donc quatre solutions réelles distinctes :

$-1, \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

b. Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, comparer cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{1}{2}$ puis déterminer la valeur exacte de cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On a démontré que à la question **3.** que :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \quad (**)$$

ce qui s'écrit aussi, avec la définition du polynôme P :

$$P\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 0$$

autrement dit cos $\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est l'une des solutions réelles de $P(x) = 0$.

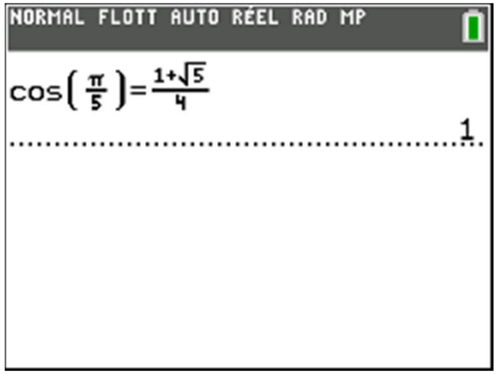
Or, par lecture graphique sur le cercle trigonométrique on « voit » que

cos $\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et la seule racine de P strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

« Vérification » à la calculatrice



utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »